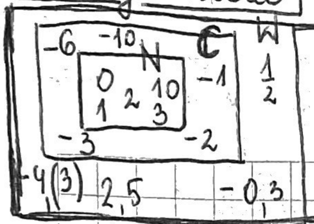
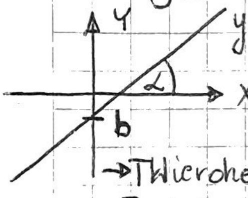
Zbiory liczbowe



→ liczby parzyste - całkowite wielokrotności liczby 2 (parzysta)
→ $2n$ - zapis liczby parzystej ($n \in C$)
→ $2n+1$ - zapis liczby nieparzystej
→ $3n+2$ - zapis liczby, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2
→ $7n+5$ - zapis liczby, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 5
→ $9n$ - liczby podzielne przez 9

→ liczby pierwsze - liczby naturalne, większe od 1, które mają dwa dzielniki: jedynkę i samą siebie (np 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...)
→ liczby złożone - liczby naturalne większe od 1, które nie są liczbami pierwszymi (np. 4, 6, 8, 9 ...)
→ $10x+y$ - zapis liczby dwucyfrowej, gdzie x - cyfra dziesiątek, y - cyfra jedności
$x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $x \neq 0$
→ $100x+10y+z$ - zapis liczby trzycyfrowej (x - cyfra setek, y - cyfra dziesiątek, z - cyfra jedności)

FUNKCJA LINIOWA



$y = ax+b$ a - współczynnik kierunkowy
b - wyraz wolny
• $a = tg\,\alpha$
• $OY(0, b)$ - punkt przecięcia z osią OY

→ Twierdzenie
Funkcja liniowa jest rosnąca gdy $a > 0$, malejąca gdy $a < 0$ i stała gdy $a = 0$
→ Dwie proste $k: y = a_1x + b_1$ i $l: y = a_2x + b_2$ są
• równoległe gdy $a_1 = a_2$
• prostopadłe gdy $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ równań liniowych może mieć:
→ nieskończenie wiele rozwiązań (nieoznaczony)
np. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ (oba równanie jednakowe) lub $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases}$
W interpretacji geometrycznej są to dwie proste pokrywające się
→ zero rozwiązań (sprzeczny)
np. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$ lub $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=20 \end{cases}$
W interpretacji geometrycznej to dwie proste równoległe, nie pokrywające się
→ jedno rozwiązanie (oznaczony)
np. $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 3x+5y=10 \end{cases}$
W interpretacji geometrycznej to dwie proste przecinające się.
→ UWAGA!
Aby znaleźć punkt wspólny dwóch prostych należy rozwiązać układ równań liniowych

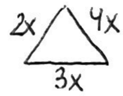
PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

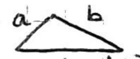
↑ o q jednostek do góry $y = f(x) + q$
← o p jednostek w lewo $y = f(x+p)$
→ o p jednostek w prawo $y = f(x-p)$
↓ o q jednostek do dołu $y = f(x) - q$
→ symetria względem osi OX $y = -f(x)$
→ symetria względem osi OY $y = f(-x)$
→ symetria względem punktu (0,0) $y = -f(-x)$

⇒ $y = f(x) \xrightarrow{S_{OX}} y = |f(x)|$
„to co pod idzie nad"
⇒ $y = f(x) \xrightarrow{S_{OY}} y = f(|x|)$

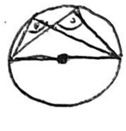
RÓŻNE

→ $\frac{n(n-3)}{2}$ - wzór na ilość przekątnych n-kąta
→ $(n-2)\cdot 180^\circ$ - suma miar kątów wewnętrznych n-kąta
→ $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ - miara kąta wewn. n-kąta foremnego
→ $a\sqrt{3}$ - długość przekątnej sześcianu
→ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ - długość przekątnej prostopadłościanu
→ Stosunek zapisujemy z „x"
np. jeżeli stosunek długości boków Δ wynosi 2 : 3 : 4 to rysunek wygląda:



→ 

c - najdłuższy
Jeżeli $a^2+b^2=c^2$ to Δ jest prostokątny
Jeżeli $a^2+b^2>c^2$ to Δ jest ostrokątny
Jeżeli $a^2+b^2<c^2$ to Δ jest rozwartokątny
→ Do podania mediany - dane należy uporządkować rosnąco
→ Aby podać ilość punktów wspólnych np. okręgu, paraboli z prostą, robimy to metodą graficzną (rysunek)!
→ Każdy kąt oparty na średnicy okręgu ma miarę 90°



→ w ciągu arytmetycznym: dwa razy środkowa = suma sąsiadów
→ w ciągu geometrycznym: kwadrat środkowej = iloczyn sąsiadów
→ W figurach podobnych wszystkie odcinki są w skali k, zaś pola są w skali k^2
→ Zadanie
Średnia wieku 10 osób to 16 lat. Jeśli dołączymy wiek nauczyciele średnia wzrośnie do 18 lat. Ile lat ma nauczyciel? $\frac{10\cdot 16 + x}{...} = 18$

FUNKCJA KWADRATOWA

→ postać ogólna $y=ax^2+bx+c \quad a\neq 0$
Jeśli $a>0$ to parabola ma ramiona do góry (wesoła)
Jeśli $a<0$ to parabola ma ramiona do dołu (smutna)

→ postać kanoniczna $y=a(x-p)^2+q \quad , a\neq 0$
Wierzchołek paraboli $W(p,q)$

$$p=\frac{-b}{2a}, \quad q=\frac{-\Delta}{4a}$$
$$p=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad q=f(p)$$
} wzory na współrzędne wierzchołka paraboli

→ postać iloczynowa $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq 0$, $\Delta \geq 0$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

→

$W(p,q)$

$ZW=\langle q,+\infty)$
$f\searrow (-\infty,p\rangle$
$f\nearrow \langle p,+\infty)$

→ $W(p,q)$


$ZW=(-\infty,q\rangle$
$f\nearrow (-\infty,p\rangle$
$f\searrow \langle p,+\infty)$

→ $x=p$ → równanie osi symetrii paraboli

→ Jeżeli $\Delta>0$ to f-cja kwadratowa ma dwa różne miejsca zerowe $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Jeżeli $\Delta=0$ to f-cja kwadratowa ma jedno (tzw. podwójne) miejsce zerowe $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$

Jeżeli $\Delta<0$ to f-cja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

→ Aby wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $y=f(x)$ w przedziale $\langle c,d\rangle$ należy:
1) Obliczyć $f(c)=\ldots$ i $f(d)=\ldots$
2) obliczyć $p=\frac{-b}{2a}$

jeśli $p\in\langle c,d\rangle$ to obliczamy $q=f(p)=\ldots$

jeśli $p\notin\langle c,d\rangle$ to nic dalej nie liczymy

3) Spośród podkreślonych wartości wybieramy tę najmniejszą i największą.

→ Aby rozwiązać NIERÓWNOŚĆ KWADRATOWĄ, obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej będącej lewą stroną nierówności przy prawej równej zero, koniecznie RYSUJEMY PRZYBLIŻONY WYKRES i odczytujemy odpowiedź!

FUNKCJA HOMOGRAFICZNA

→ p. ogólna $y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad c\neq 0 \wedge ad\neq bc$

→ p. kanoniczna $y=\frac{A}{x-p}+q$

→ Wykresem f-cji jest hiperbola.

→ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ← miejsce zerowe $x=\frac{-b}{a}$

← $D=R-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ czyli asymptota pionowa $x=\frac{-d}{c}$

$ZW=R\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$ asymptota pozioma $y=\frac{a}{c}$

→ DEF.
Miejsce zerowe f-cji to taki argument czyli x dla którego wartość funkcji wynosi zero czyli $y=0$.

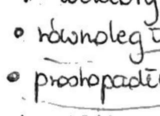
⇒ Izometria - przekształcenie zachowujące odległość między punktami

⇒ ~~Jednokładność o środku S i~~ skali $k\neq 0$: $J_S^k(A)=A' \iff \overrightarrow{SA'}=k\overrightarrow{SA}$

⇒ Wektory $\vec{u}=[x_u,y_u]$ $\vec{v}=[x_v,y_v]$;
- równoległe gdy $x_u\cdot y_v-y_u\cdot x_v=0$
- prostopadłe gdy $x_u\cdot x_v+y_u\cdot y_v=0$

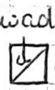
⇒ Wzajemne położenie okręgów
- rozłączne zewnętrznie $|S_1S_2|>r_1+r_2$
- styczne zewnętrznie $|S_1S_2|=r_1+r_2$
- przecinające się $|r_1-r_2|<|S_1S_2|<r_1+r_2$
- styczne wewn. $|S_1S_2|=|r_1-r_2|$
- rozłączne wewn. $|S_1S_2|<|r_1-r_2|$
- współśrodkowe $|S_1S_2|=0$

→ Środkowe w Δ przecinają się w jednym punkcie zwanym środkiem ciężkości Δ i dzielą się w stosunku 2:1

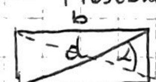


Pola tych sześciu Δ są sobie równe.

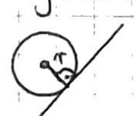
PLANIMETRIA

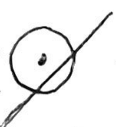
→ Kwadrat


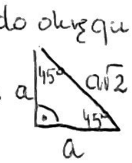
$d=a\sqrt{2}$
$P=a^2$
$P=\frac{d^2}{2}$

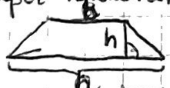
→ Prostokąt


$d=\sqrt{a^2+b^2}$
$P=ab=\frac{d^2\sin\alpha}{2}$

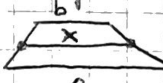
→ styczna do okręgu


→ sieczna do okręgu


→


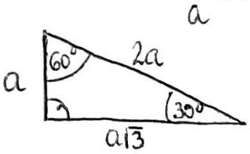
→ Trapez równoramienny


$\frac{a+b}{2}$ $\frac{a-b}{2}$

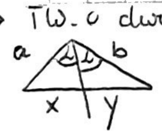
→ Trapez dowolny


$x=\frac{a+b}{2}$ odcinek łączący środki ramion trapezu

Promień jest prostopadły do stycznej w punkcie styczności

→


→ Jeżeli w Δ połączymy środki dwóch boków to odcinek ten jest równoległy do trzeciego boku i jest jego połową

⇒ TW. o dwusiecznej kąta wewn.


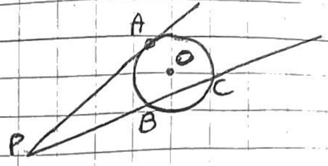
$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

- W dowolnym Δ dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt

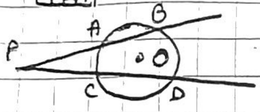
→ Tw. o stycznej i siecznej

Jeżeli przez punkt P, którego odległość od środka okręgu jest większa niż promień, poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie A i sieczną przecinającą okrąg w punktach B i C to

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$$

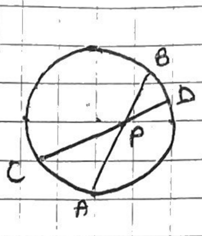


→ $\boxed{\text{Tw.}}$



$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

$\boxed{\text{TW}}$

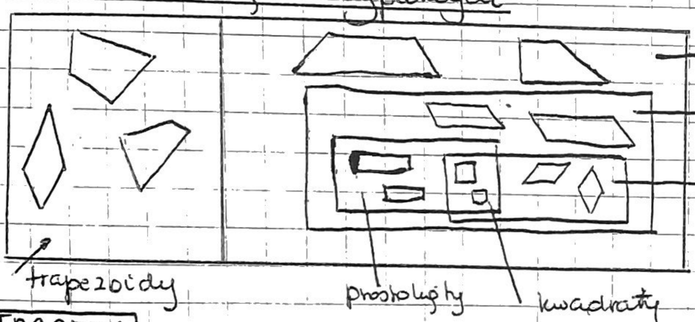


$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

→ $\boxed{\text{TW}}$

Stosunek pól Δ podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa.

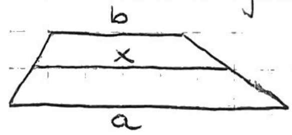
→ Podział czworokątów wypukłych



- trapezoidy – czworokąty nie mające ani jednej pary boków równoległych
- trapezy – czworokąty mające co najmniej jedną parę boków równoległych
- równoległoboki – czworokąty mające dwie pary boków równoległych.

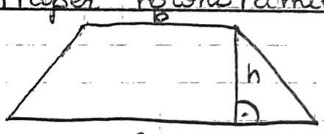
→ $\boxed{\text{TRAPEZY}}$

- W dowolnym trapezie suma kątów przy każdym ramieniu jest równa $180°$
- W dowolnym trapezie odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw trapezu i jest połową długości sumy podstaw.



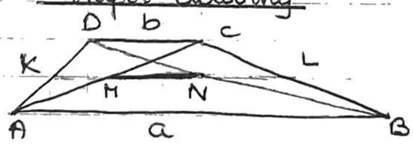
$$x = \frac{a+b}{2}$$

→ Trapez równoramienny



$$\underbrace{}_{\frac{a+b}{2}} \quad \underbrace{}_{\frac{a-b}{2}}$$

→ Trapez dowolny



$$|KL| = \frac{a+b}{2}$$

$$|MN| = \frac{a-b}{2}$$

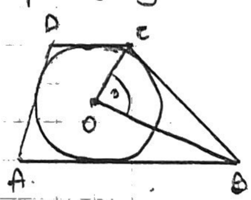
MN – odcinek łączący środki przekątnych

→ Trapez dowolny

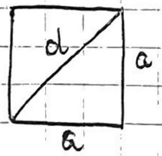
α – kąty równe (naprzemianległe)

→ Trapez dowolny

$$|\measuredangle BOC| = 90°$$



→ Kwadrat



$d = a\sqrt{2}$

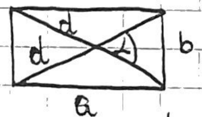
$P = a^2$

$P = \frac{d^2}{2}$

$r = \frac{a}{2}$

$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

→ Prostokąt

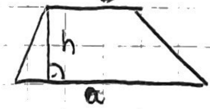


$P = ab$

$P = \frac{d^2 \sin\alpha}{2}$

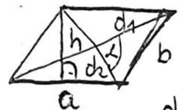
$d = \sqrt{a^2+b^2}$

→ Trapez



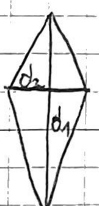
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

→ Równoległobok



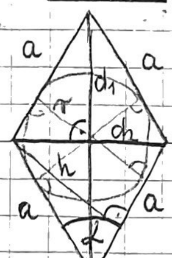
$$P = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2 \sin\alpha}{2}$$

→ Deltoid



$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

→ Romb



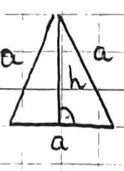
$P = a \cdot h$

$P = \frac{d_1 d_2}{2}$

$P = a^2 \sin\alpha$

$r = \frac{h}{2}$

→ trójkąt równoboczny



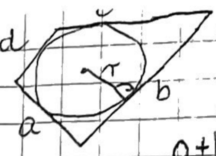
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Jeżeli w czworokąt można wpisać okrąg, to pole tego czworokąta jest równe iloczynowi promienia okręgu wpisanego w ten czworokąt i połowy obwodu czworokąta

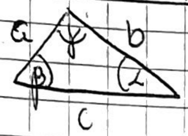


$P = r \cdot p$ $\quad p = \frac{a+b+c+d}{2}$

→ Jeśli przekątne czworokąta wypukłego mają długości d_1, d_2 oraz przecinają się pod kątem α to pole tego czworokąta wyraża się wzorem

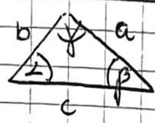
$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$$

→ TW. SINUSÓW



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

→ TW. COSINUSÓW

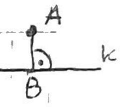


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

PLANIMETRIA

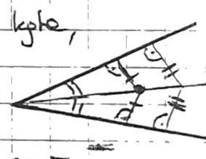
- Figurę nazywamy **wypukłą** wtedy, gdy dla dowolnych punktów A i B, należących do tej figury, odcinek AB zawiera się w tej figurze.
- Figurę nazywamy **wklęsłą**, gdy nie jest wypukła
- Kąty wypukłe - miary $\langle 0°; 180°\rangle$ włącznie, kąty wklęsłe - $(180°, 360°)$
- Kąty przyległe - jeśli mają jedno ramię wspólne, a dwa pozostałe ramiona tworzą prostą

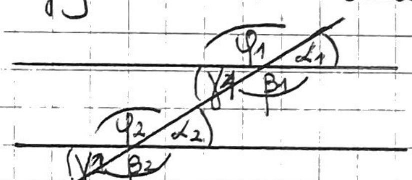
- Figura płaska F jest ograniczona wtedy, gdy istnieje takie koło K, które zawiera figurę F np. punkt, odcinek, koło. Figury nieograniczone np. prosta, półprosta, kąt.
- Wielokątem nazywamy figurę ograniczoną, wyciętą z płaszczyzny przez łamaną zwyczajną zamkniętą, punkty łamanej należą do wielokąta
- TW Liczba przekątnych w n-kącie ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) wyraża się wzorem $\frac{n(n-3)}{2}$
- Kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego jest to kąt przyległy do kąta wewnętrznego.
- Def Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość i wszystkie kąty są równe.
- Kątem między przecinającymi się prostymi nazywamy kąt nie większy od kąta prostego, wyznaczony przez te proste.
- Odległością punktu A od prostej k ($A \notin k$) nazywamy długość odcinka prostopadłego do prostej k, którego jednym końcem jest punkt A, drugim punkt B, należący do prostej k.



- Def Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do odcinka, dzielącą go na dwie równe części.
- TW Symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny, równo odległych od końców tego odcinka.

- Def Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą kąt na dwa kąty równe.
- TW Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem punktów kąta, równo odległych od ramion tego kąta.





$\left.\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2 \\ \beta_1, \beta_2 \\ \gamma_1, \gamma_2 \\ \varphi_1, \varphi_2\end{matrix}\right\}$ kąty odpowiadające

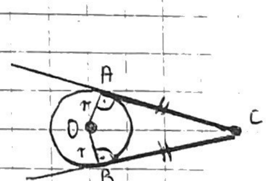
$\left.\begin{matrix}\varphi_1, \beta_2 \\ \alpha_1, \gamma_2\end{matrix}\right\}$ kąty naprzemianległe zewnętrznie

$\left.\begin{matrix}\alpha_2, \gamma_1 \\ \varphi_2, \beta_1\end{matrix}\right\}$ kąty naprzemianległe wewnętrznie

- TW Suma kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego jest równa $(n-2) \cdot 180°$ gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta ($n \in \mathbb{N} \wedge n > 2$)
- Suma kątów wewnętrznych n-kąta wklęsłego również wyraża się wzorem $(n-2) \cdot 180°$ gdzie $n \in \mathbb{N} \wedge n > 3$
- TW W dowolnym wielokącie wypukłym suma wszystkich kątów zewnętrznych jest stała i wynosi ~~720°~~.
- TW o odcinkach stycznych

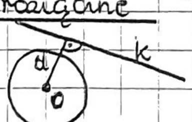
Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z punktu, którego odległość od środka okręgu jest większa niż promień - wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności - mają tę samą długość.

$|AC| = |BC|$



- Wzajemne położenie prostej i okręgu

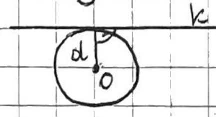
rozłączne



$d(O,k) > r$

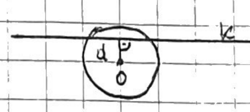
odległość punktu A od prostej k

styczna



$d(O,k) = r$

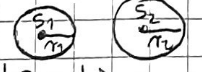
sieczna



$d(O,k) < r$

- Wzajemne położenie dwóch okręgów $O_1(S_1, r_1)$ i $O_2(S_2, r_2)$

rozłączne zewnętrznie



$|S_1S_2| > r_1 + r_2$

odległość między środkami okręgów

styczne zewnętrznie

$|S_1S_2| = r_1 + r_2$

przecinające się

$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$

Styczne wewnętrznie

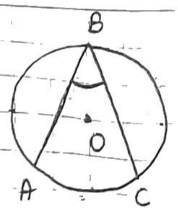
$|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$

Rozłączne wewnętrznie

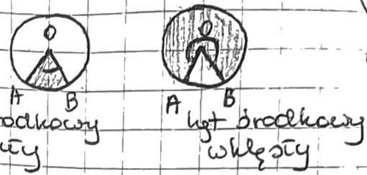
$0 < |S_1S_2| < |r_1 - r_2|$

Współśrodkowe

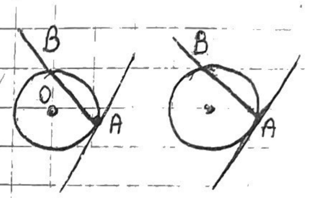
$|S_1S_2| = 0$



- Kątem wpisanym w koło nazywamy kąt wypukły, wyznaczony przez dwie półproste zawierające cięciwy o wspólnym końcu, będącym wierzchołkiem kąta.
- Kątem środkowym koła nazywamy kąt, którego wierzchołek znajduje się w środku koła.



- TW Jeśli kąt środkowy i wpisany oparte są na tym samym łuku, to kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego.
- TW Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.
- Def Kątem dopisanym do okręgu w punkcie A należącym do okręgu nazywamy kąt wypukły wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie A oraz półprostą zawierającą cięciwę o końcu w punkcie A.



- TW Kąt dopisany i wpisany, oparte na tym samym łuku, są równe.

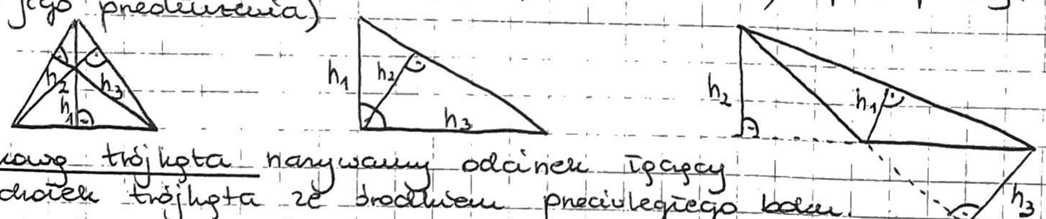
Nierówność trójkąta

W dowolnym Δ długość każdego boku jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków i większa od wartości bezwzględnej różnicy długości tych boków.

TW Jeżeli w Δ połączymy środki dwóch boków, to powstały odcinek jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.

TW Jeżeli długości boków Δ a, b, c spełniają warunek $a \le b \le c$ oraz $a^2+b^2<c^2$ to Δ jest rozwartokątny, jeśli $a^2+b^2>c^2$ to Δ jest ostrokątny.

Def. Wysokością trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem) prostopadły do tego boku (lub jego przedłużenia)



Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia środkowych.

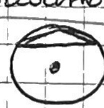
W dowolnym Δ trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1 : 2.

Symetralne trzech boków dowolnego Δ przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie

Δ równoramienny

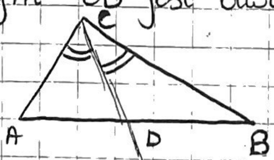
Δ prostokątny

Δ rozwartokątny



TW. o dwusiecznej kąta wewnętrznego

W dowolnym Δ ABC, w którym CD jest dwusieczną kąta wewnętrznego tego Δ prawdziwa jest równość

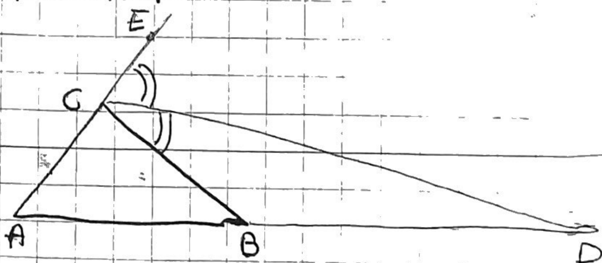


$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}$$

TW. o dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta

W dowolnym Δ ABC, w którym CD jest dwusieczną kąta zewnętrznego ECB, prawdziwa jest równość:

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|DB|}$$



ukośna: $ax+b \Rightarrow a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{\pm\infty} (f(x)-ax)$

Asymptoty: pionowa → to co wykluczone z D, gdy $\lim_{x\to x_0^{+(-)}} = \pm\infty$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{w miejsce „x" wstaw „x-a"}]{T[a,0]} y = f(x-a)$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{do wzoru funkcji dodaj „b"}]{T[0,b]} y = f(x)+b$$

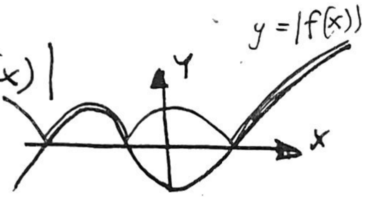
$$y = f(x) \xrightarrow[\text{w miejsce „x" wstaw „x-a" i do wzoru dodaj „b"}]{T[a,b]} y = f(x-a)+b$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{postaw przed całym wzorem minusa}]{S_{OX}} y = -f(x)$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{postaw zamiast „x" „-x"}]{S_{OY}} y = f(-x)$$

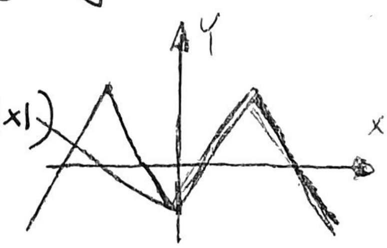
$$y = f(x) \xrightarrow[\text{postaw zamiast „x" „-x" i przed całym wzorem minusa}]{S_{(0,0)}} y = -f(-x)$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{wstaw cały wzór w moduł}]{S_{czOX}} y = |f(x)|$$



Części wykresu leżące pod osią OX odbijamy symetrycznie względem tej osi. Szukany wykres to suma części odbitej i nieodbijanej.

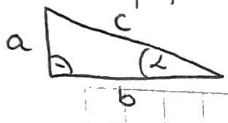
$$y = f(x) \xrightarrow[\text{wstaw „x" w moduł}]{S_{czOY}} y = f(|x|)$$



Części wykresu leżące po stronie prawej osi OY odbijamy na stronę lewą. Szukany wykres to suma części odbitej i odbijanej

TRYGONOMETRIA

W trójkącie prostokątnym (kąta ostrego)



$$\sin\alpha = \frac{\text{przyprostokątna leżąca na przeciwko kąta}}{\text{przeciwprostokątna}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{przyprostokątna leżąca przy kącie}}{\text{przeciwprostokątna}} = \frac{b}{c}$$

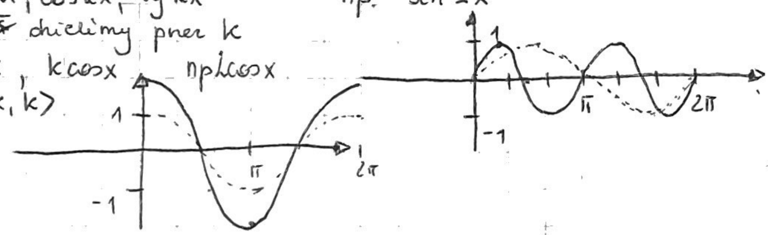
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{przyprostokątna leżąca na przeciwko kąta}}{\text{przyprostokątna leżąca przy kącie}} = \frac{a}{b}$$

Wzory określające rozwiązania elementarnych równań tryg.

- $\sin x = a \ \wedge \ a \in \langle -1, 1 \rangle$
  $x = x_0 + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - x_0) + 2k\pi \quad \wedge \ k \in C$
- $\cos x = a \ \wedge \ a \in \langle -1, 1 \rangle$
  $x = x_0 + 2k\pi \ \vee \ x = -x_0 + 2k\pi \quad \wedge \ k \in C$
  (dla $a \in \{-1, 1, 0\}$ mamy po jednym zapisie rozwiązań)!
- $\operatorname{tg} x = b \ \wedge \ b \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
  $x = x_0 + k\pi \ \wedge \ k \in C$

$y = \sin kx, \cos kx, \operatorname{tg} kx$ — okres T dzielimy przez k — np. $\sin 2x$

$y = k\sin x, \ k\cos x$ — np. $k\cos x$
$ZW = \langle -k, k \rangle$



Dwie funkcje są równe jeżeli mają takie same dziedziny czyli $D_f = D_g = D$ i dla każdego $x \in D$ wartości obu f-cji są takie same czyli $f(x) = g(x)$

WIELOMIANY

Pierwiastek wielomianu to liczba zerująca wielomian czyli liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ gdy $W(a) = 0$.

Twierdzenie Bezouta
liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) \Leftrightarrow$ wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-a)$

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-a)$ wynosi $W(a)$.

Dwa wielomiany są równe gdy są tego samego stopnia i współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są sobie równe.

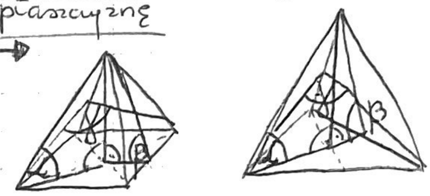
Każdy wielomian można zapisać:
$W(x) = Q(x) \cdot J(x) + R(x)$
dzielna dzielnik iloraz reszta

Stopień reszty jest ~~maksymalnie co najwyżej o 1 stopień~~ niższy od stopnia dzielnika

Tw. o wymiernych pierwiastkach wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych
Jeżeli liczba p/q jest wymiernym pierwiastkiem $W(x)$ to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego, zaś q jest dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze x.

STEREOMETRIA

Kąt między prostą a płaszczyzną to kąt jaki tworzy prosta ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę

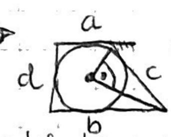


α – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
β – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy lub kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do pł. podstawy
γ – kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi

Jeżeli w ostrosłupie wszystkie krawędzie boczne są równej długości lub tworzą równe kąty z pł. podstawy lub tworzą równe kąty z wysokością ostrosłupa to spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie

~~Jeżeli w ostrosłupie~~ wszystkie wysokości ścian bocznych są równej długości lub tworzą z płaszczyzną podstawy równe kąty lub tworzą z wysokością ostrosłupa równe kąty to spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

PLANIMETRIA



- Środek leży na przecięciu dwusiecznych
- $P_{czworokąta} = r \cdot p$ — p – połowa obwodu

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

rzut kostką kolejno losujemy

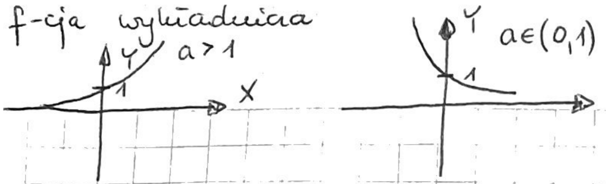
rzut dwiema kostkami do gry
$\{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)$
$(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)$
$(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)$
$(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6)$
$(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)$
$(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\}$

rzut dwiema monetami
$\{(O,O)(O,R)(R,O)(R,R)\}$

rzut trzema monetami $\{(O,O,O)(O,O,R)(O,R,O)(R,O,O)(R,R,O)(R,O,R)(O,R,R)(R,R,R)\}$

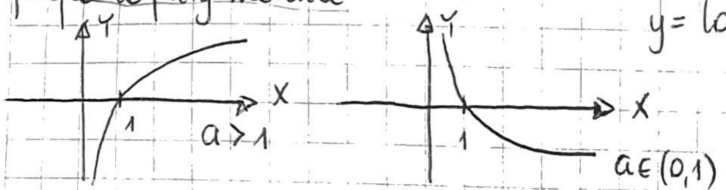
WYKRESY

f-cja wykładnicza



$y = a^x$

f-cja logarytmiczna



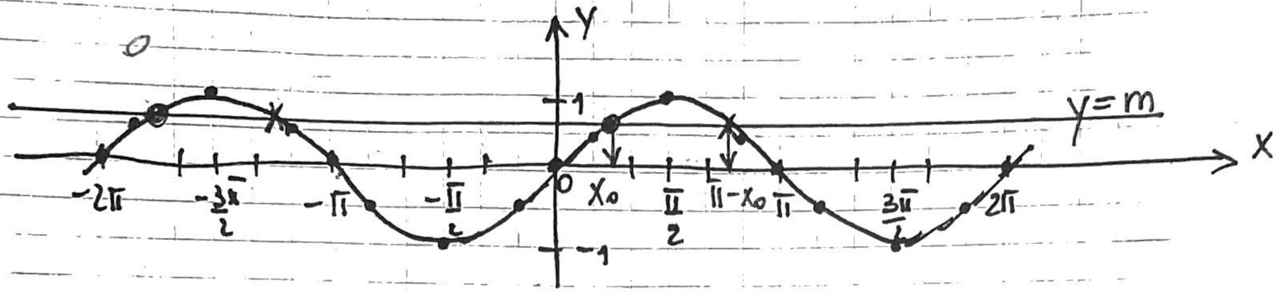
$y = \log_a x$

Twierdzenie 1.

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Jeśli:

1) $a_1 > 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym;
2) $a_1 > 0$ i $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym;
3) $a_1 < 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym;
4) $a_1 < 0$ i $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym;
5) $q = 1$ lub $q = 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem stałym; jeśli $q = 0$ — od drugiego wyrazu;
6) $a_1 \neq 0$ i $q < 0$, to ciąg (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym.

$\sin x = m \ \wedge \ m \in \langle -1, 1 \rangle$



$$x = x_0 + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - x_0) + 2k\pi \qquad \wedge \ k \in \mathbb{C}$$

$\sin x = 0 \iff x = k\pi$

$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

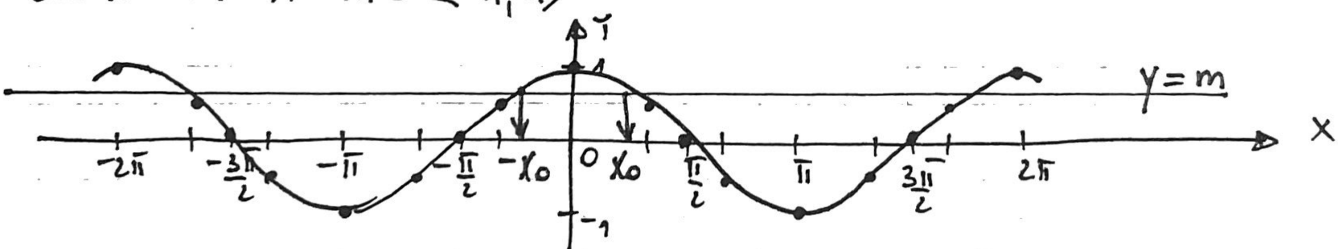
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$\cos x = m \ \wedge \ m \in \langle -1, 1 \rangle$



$$x = x_0 + 2k\pi \ \vee \ x = -x_0 + 2k\pi \qquad \wedge \ k \in \mathbb{C}$$

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos x = 1 \iff x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi$

$\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

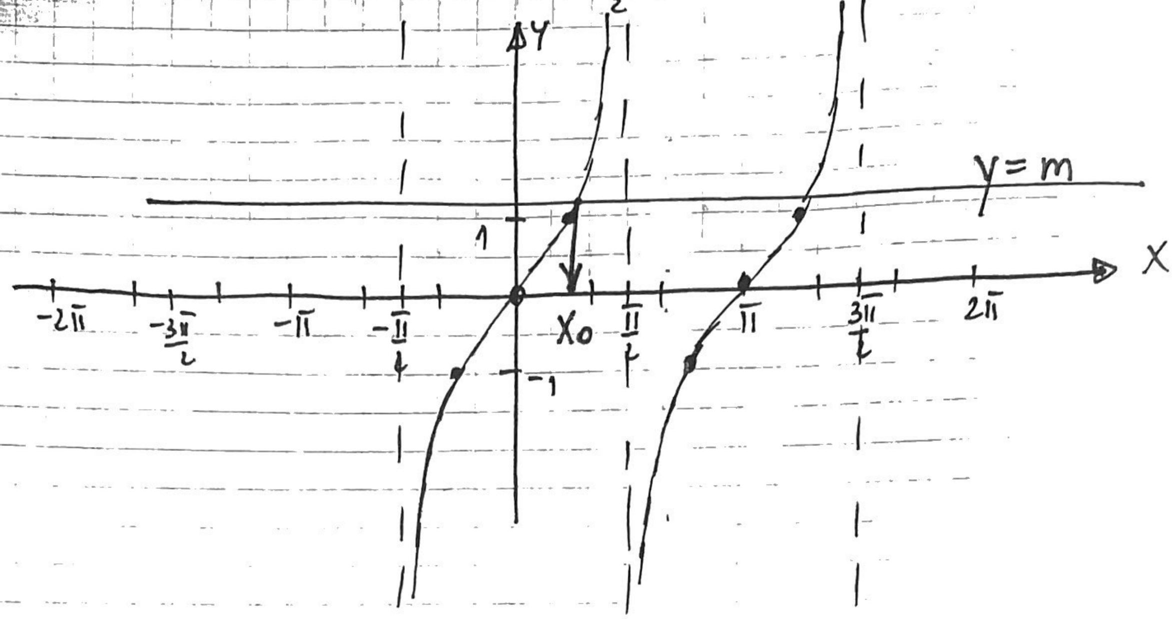
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\wedge \ m \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ k \in \mathbb{C}$



$x = x_0 + k\pi \ \wedge \ k \in \mathbb{C}$

$tg\,x = 0 \iff x = k\pi$

$tg\,x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$tg\,x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

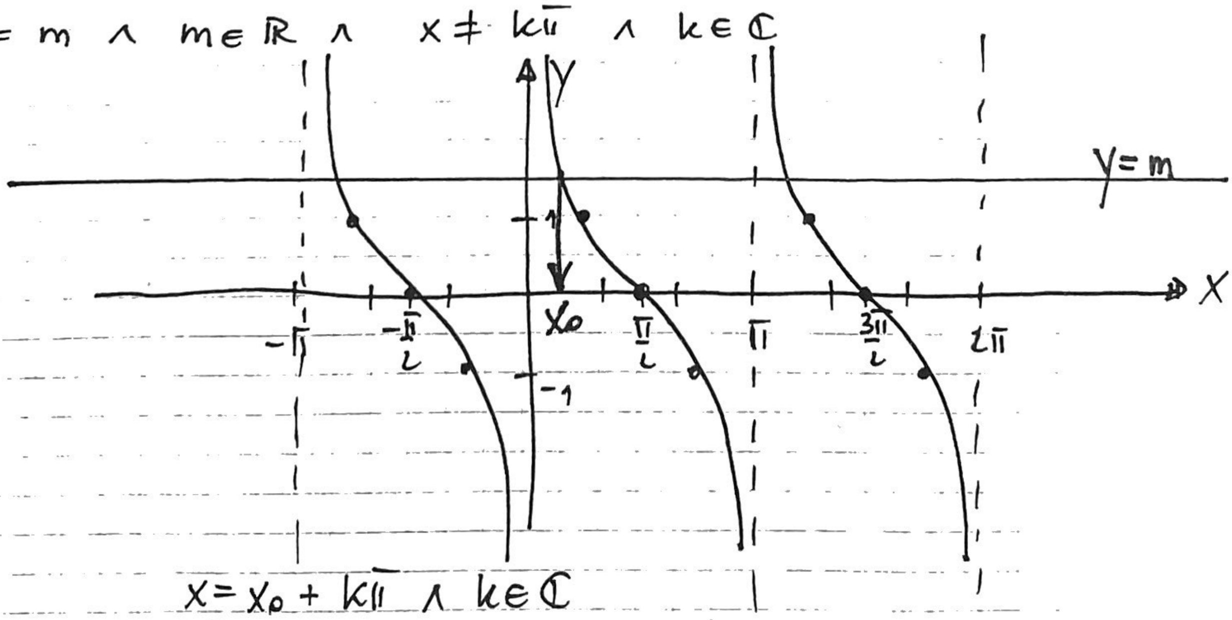
$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \iff x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

$tg\,x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$tg\,x = -\sqrt{3} \iff x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$ctg\,x = m \ \wedge \ m \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq k\pi \ \wedge \ k \in \mathbb{C}$



$x = x_0 + k\pi \ \wedge \ k \in \mathbb{C}$

$ctg\,x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$ctg\,x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$ctg\,x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$ctg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$ctg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \iff x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$ctg\,x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$ctg\,x = -\sqrt{3} \iff x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$